

Алексеев Г. В., Спивак Ю. Э.
G. V. Alekseev, Yu. E. Spivak

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

CONTROL PROBLEMS FOR A MAGNETOHYDRODYNAMICS STATIONARY MODEL OF A VISCOUS HEAT-CONDUCTING FLUID

Алексеев Геннадий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН; профессор Департамента математического и компьютерного моделирования Дальневосточного федерального университета (Россия, Владивосток).

Gennady V. Alekseev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Principal Researcher, Institute of Applied Mathematics FEB RAS; Professor of Mathematical and Computer Modeling Department, Far Eastern Federal University (Russia, Vladivostok).

Спивак Юлия Эдуардовна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН (Россия, Владивосток).

Yuliya E. Spivak – PhD in Physics and Mathematics, Junior Researcher, Institute of Applied Mathematics FEB RAS (Russia, Vladivostok).

Аннотация. Исследуются задачи управления для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости в приближении Буссинеска. Доказывается глобальная разрешимость общей задачи управления. Устанавливаются достаточные условия, обеспечивающие локальную единственность и устойчивость решений рассматриваемой задачи управления для конкретных функционалов качества.

Summary. Control problems are studied for a magnetohydrodynamics stationary model of a viscous heat-conducting fluid in the Boussinesq approximation. The global solvability of the general control problem is proved. Sufficient conditions are established to ensure local uniqueness and stability of solutions to the control problem under consideration for certain cost functionals.

Ключевые слова: система МГД-Буссинеска, смешанные граничные условия, задача управления, система оптимальности, разрешимость, единственность, оценки устойчивости.

Key words: MHD-Boussinesq system, mixed boundary conditions, control problem, optimality system, solvability, uniqueness, stability estimates.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00459-24-00).

УДК 517.95

Введение. Задачи управления магнитогидродинамическими (МГД) течениями электрически- и теплопроводящей жидкости исторически возникли сначала в металлургии и литейном производстве при разработке оптимальных технологий бесконтактного электромагнитного размещения расплавленных металлов [1] и в ядерной индустрии при создании эффективных систем жидкометаллического охлаждения агрегатов ядерной энергетики [2]. Затем к необходимости решения задач управления привели проблемы, возникающие при создании установок для промышленного выращивания кристаллов методами расплавления и растворения [3] и при разработке новых подводных двигателей [4].

В работах [5; 6] был предложен оригинальный подход к исследованию краевых задач для уравнений МГД вязкой несжимаемой жидкости. Использование этого подхода позволило получить результаты о разрешимости краевых задач при ослабленных условиях на гладкость гранич-

ных данных для магнитного поля. Эта же идея оказалась полезной и при исследовании задач управления для указанной модели МГД [7].

Настоящая работа продолжает развивать направление, начатое в предыдущих работах [5–7]. Её целью является развитие математического аппарата исследования указанной ниже краевой задачи для стационарной модели МГД-Буссинеска, включающего в себя как теоретический анализ, так и вычислительные аспекты.

Постановка краевой задачи. Описание схемы исследования. Пусть Ω – ограниченная область в трёхмерном пространстве с границей Γ , состоящей из двух частей: Γ_D и Γ_N . [Характерные примеры областей Ω представлены на рис. 1.] В работе рассматривается следующая краевая задача для стационарной модели МГД-Буссинеска:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \kappa \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H} = \mathbf{f} - \mathbf{b}T, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{b} = b\mathbf{G}, \quad (1)$$

$$\nu_1 \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{E} + \kappa \mathbf{H} \times \mathbf{u} = \nu_1 \mathbf{J}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

$$-\lambda \Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = f \text{ в } \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = q, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mathbf{k}, \quad \kappa = \mu/\rho_0, \quad \nu_1 = (\rho_0 \sigma)^{-1} \equiv \kappa \nu_m, \quad (4)$$

$$T = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda(\partial T / \partial n + \alpha T) = \chi \text{ на } \Gamma_N, \quad (5)$$

моделирующая движение вязкой теплопроводящей электрически проводящей жидкости. Здесь используются обычные для данной модели обозначения [1; 2], в частности, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{H}$ – векторы скорости и напряжённости магнитного поля, T – температура, b – коэффициент теплового расширения, $\mathbf{g}, \mathbf{k}, q, \psi$ и α, χ – определённые на Γ , Γ_D и Γ_N функции. Слагаемое $\mathbf{b}T = bT\mathbf{G}$ имеет смысл силы плавучести в приближении Буссинеска. Все величины, входящие в (1)–(5), считаются размерными, причём все уравнения записаны в системе единиц СИ.

Разработанная на основе указанного математического аппарата схема исследования задачи (1)–(5) состоит из шести этапов.

На этапе 1 вводится понятие слабого решения задачи (1)–(5) и устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие глобальную разрешимость рассматриваемой задачи и локальную единственность её слабого решения. Одновременно выводятся априорные оценки решения через нормы исходных данных.

На этапе 2 вводятся два функциональных пространства X и Y и оператор $F : X \rightarrow Y$, действующий из X в Y . Пространство X имеет смысл пространства, в котором ищется решение исходной краевой задачи, Y имеет смысл пространства, которому принадлежат исходные данные (правые части уравнений и граничных условий), наконец, F описывает оператор краевой задачи. Все исходные данные задачи разбиваются на две группы: группу фиксированных данных u_0 и группу управлений u , а исходная краевая задача сводится к отысканию решения (главного состояния) $\mathbf{x} \in X$ операторного уравнения $F(\mathbf{x}, u, u_0) = 0$, представляющего собой эквивалентную запись слабой формулировки исходной краевой задачи (1)–(5).

На этапе 3 вводится функционал качества J , адекватно отвечающий цели исследования и зависящий как от состояния $\mathbf{x}$, так и управления u . В предположении, что u принадлежит выпуклому замкнутому множеству K , формулируется исходная задача управления в виде задачи условной минимизации $J(\mathbf{x}, u) \rightarrow \inf, F(\mathbf{x}, u) = 0, \mathbf{x} \in X, u \in K$. Далее исследуется её разрешимость.

На этапе 4 в дополнение к основным пространствам X и Y вводятся двойственные к ним пространства X^* и Y^* , сопряжённое состояние $\mathbf{y}^* \in Y^*$, лагранжиан $\mathcal{L}(\mathbf{x}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, u) \rangle_{Y^* \times Y}$, где $\lambda_0 \geq 0$, и вычисляется частная производная Фреше $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) : X \rightarrow Y$ от оператора F в точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ локального минимума. Доказывается фредгольмовость оператора $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ и выводятся необходимые условия оптимальности. Они состоят из уравнения Эйлера-Лагранжа $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})^* \mathbf{y}^* + \lambda_0 J'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) = 0$ в X^* , где $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})^* : Y^* \rightarrow X^*$ – сопряжённый к $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ оператор, и принципа минимума $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*)$ для всех $u \in K$, образуя-

щих вместе с уравнением $F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ систему оптимальности, описывающую необходимые условия экстремума.

На этапе 5 на основе анализа свойств системы оптимальности устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решений экстремальных задач.

На этапе 6 разрабатывается эффективный численный алгоритм решения конкретной задачи управления. Один из возможных алгоритмов основывается на использовании построенной системы оптимальности, решение которой находится с помощью итерационного метода Ньютона.

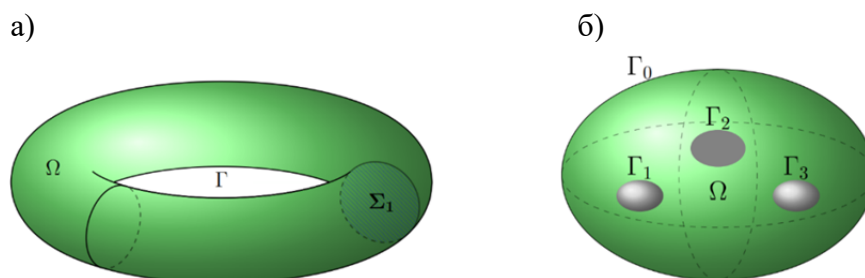


Рис. 1. Характерные примеры областей Ω : а – неодносвязная тороидальная область Ω со связной границей Γ ; б – односвязная область Ω с несвязной границей $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Заключение. В работе предложен математический аппарат исследования задач управления для стационарной модели МГД вязкой теплопроводной жидкости, описываемой соотношениями (1)–(5). Основная модель состоит из уравнений Навье – Стокса, уравнений Максвелла без токов смещения, обобщённого закона Ома для движущейся среды и уравнения конвекции-диффузии для температуры, нелинейно связанных через силу Лоренца, силу плавучести в приближении Буссинеска и конвективный перенос тепла. Использование предложенного аппарата позволяет доказать глобальную разрешимость общей задачи управления и локальную единственность и устойчивость оптимальных решений. Описанию соответствующих результатов будет посвящена отдельная работа авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Верте, Л. А. Магнитная гидродинамика в металлургии / Л. А. Верте. – М.: Металлургия, 1975. – 287 с.
2. Лаврентьев, И. В. Жидкометаллические системы термоядерных реакторов-токамаков / И. В. Лаврентьев // Магнитная гидродинамика. – 1990. – № 2. – С. 105-124.
3. Muller, G. Convection and inhomogeneties in crystal growth from the melt / G. Muller. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1988. – 136 p.
4. Конвер, Д. Внешняя МГД тяга / Д. Конвер, Ж. П. Тибо // Магнитная гидродинамика. – 1995. – Т. 31. – № 34. – С. 328-335.
5. Алексеев, Г. В. Разрешимость неоднородной краевой задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости / Г. В. Алексеев // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52. – № 6. – С. 760-769.
6. Alekseev, G. V. Mixed boundary value problems for stationary magnetohydrodynamic equations of a viscous heat-conducting fluid / G. V. Alekseev // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. – 2016. – Vol. 18. – No 3. – P. 591-607.
7. Alekseev, G. V. Analysis of control problems for stationary magnetohydrodynamics equations under the mixed boundary conditions for a magnetic field / G. V. Alekseev // Mathematics. – 2023. – Vol. 11. – No 2610. – P. 1-29.